

データ解析 第10回 検定の基礎・t検定

北九州市立大学経済学部

齋藤 朗宏

今日の話題

- 背理法
- 統計的仮説検定
- t 検定

背理法

問題

- ▶ ドラマ“相棒”の2012年11月21日における関東地区の視聴率は16.4%。（ビデオリサーチ社調べ）であった。関東地方における真の視聴率が10%ではないことを示せ。
 - 視聴率は、本当に10%を下回っていないのか？

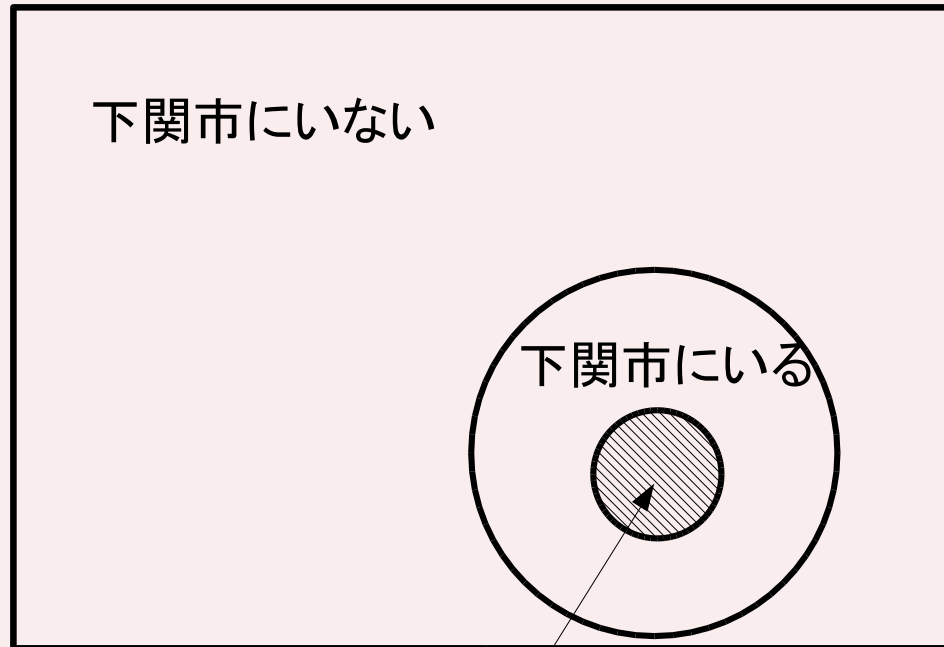
背理法

- 証明したい命題（統計学においては集合と考えても問題ない） A について，それを敢えて否定する A^c を提示し，その A^c が成立し得ないという事実を示すことで， A の正しさを示す方法。
- 証明したいこと
 - 私は12月7日11時に下関で起こった殺人事件の犯人ではない (A) .
- 証明方法
 - もし私が犯人であった (A^c) とする。そうであれば，私はその時間下関にいる筈である。しかし，私はその時間，データ解析の講義をしていた。これは矛盾である。よって，私は犯人ではありえない。

背理法

- 背理法で証明できない場合でも、否定したかった A^c が真実であったことの証明にはならない.
 - 仮に私が講義を休講にしてその時間下関にいたとする。この場合、犯人ならばその時間下関にいる筈であるという命題は否定できない。しかし、だからと言って私が犯人だという証明にはならない。そもそも、下関には30万の人がいる。犯人はそのうちのたった一人であり、それ以外は犯人ではないので、「下関にいなければ犯人ではない」は事実でも、「下関にいたら犯人である」には無理がある。
 - 魔女ではないことを証明できないからと言って、魔女であるという証明にはならない。

背理法のイメージ



犯人である

- 「犯人である」は「下関市にいる」の部分集合なので、「下関市にいる」を否定すれば「犯人である」も否定される。ただし、下関市にいるからといって犯人ではない。

統計的仮説検定

問題

- ▶ ドラマ“相棒”の2012年11月21日における関東地区の視聴率は16.4%。（ビデオリサーチ社調べ）であった。関東地方における真の視聴率が10%ではないことを示せ。

回答

- 実際には完全に証明することは極めて難しいが、真の視聴率10%のとき、600世帯から得られた視聴率が16.4%になるという事実がどの程度起こりにくいのかを示すことで、確率的に導くことができる。 → 統計的仮説検定

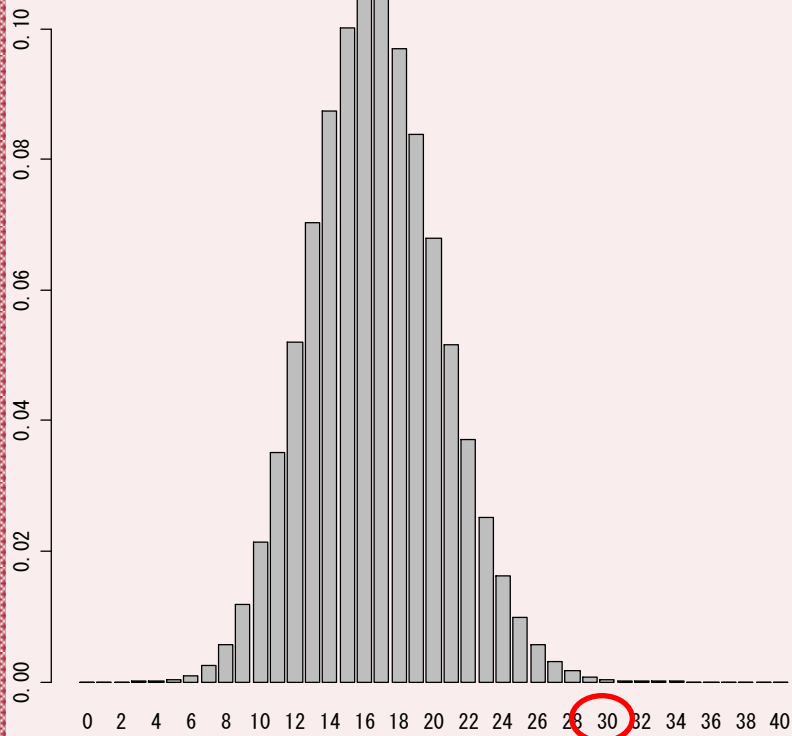
統計的仮説検定

- 統計学では、母数がある値ではないことを証明したい場合が多々ある。
 - 6面さいころの、各々の目が出る確率は $1/6$ である。しかし、イカサマ用のさいころだったら $1/6$ にはならない。たとえば、6の目が出やすいさいころであることを証明するには？
 - 日本人と韓国人は同じ東アジア人であり、体格も比較的似ている。日本人と韓国人の平均身長が違うことを証明するには？

統計的仮説検定

- 6面さいころの、各々の目が出る確率は $1/6$ である。しかし、イカサマ用のさいころだったら $1/6$ にはならない。たとえば、6の目が出やすいさいころであることを証明するには？
- さいころの目が6となることを成功、6以外となることを失敗と置くと、出目が6か否か、その回数は2項分布に従う。従って、 $p = 1/6$ の2項分布ではまず起こりえない程6の目の出る回数が多ければ、イカサマ用のさいころと見なすことができる。

統計的仮説検定



- さいころを100回振ったとする。もし6の目が出る確率が $1/6$ なら、成功回数は以下のような2項分布に従う。ここで、もし6の目が30回出たとすれば、これは6の目が出る確率が $1/6$ なのだけどもたまたま起こりにくいことが起こったと考えるより、6が出る確率は $1/6$ ではないと考える方が自然である。

統計的仮説検定の手順

1. 検証したい事柄を確認する（6の目の出やすいさいころか？）.
 - 6の目の出やすいさいころであれば、6の目の出る確率は $1/6$ より大きくなる。そうでなければ、確率は $1/6$ となる。6が出やすいと示したい。
2. 背理法に従い、検証したい事柄を否定する仮説を立てる。これを**帰無仮説**と呼ぶ（各々の目が出る確率は $1/6$ で等しい）。
 - もしイカサマでないのだとすれば、さいころを100回振った時、6の目の出る回数は $p = 1/6, n = 100$ の2項分布に従う。

統計的仮説検定の手順

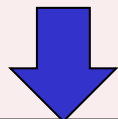
3. データを取り，その結果が帰無仮説の下で十分に起こりにくいことであるか確認する。
 - どのくらいの確率で起こることだったら「起こりにくい」と考えるか，その基準を定める必要がある。この基準となる確率を**有意水準**と呼び， α で表す。一般的には， $\alpha = 0.05, 0.01, 0.001$ などが基準としてよく用いられる。
 - 2項分布の累積分布関数から， $p = 1/6, n = 100$ であれば，10回から24回の間全体95%が入る。よって，有意水準を5%と設定した場合，9回以下あるいは25回以上であったならば，起こりにくいことが起きた。10回から24回の間なら起こりにくいことは起きてないと考えられる。

統計的仮説検定の手順

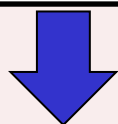
4. 起こりにくいことが起こった場合には，帰無仮説を棄却して**対立仮説**を採択する。
- 30回6の目が出たので，このさいころはイカサマではないという帰無仮説は棄却され，このさいころはイカサマであり，各々の目が出る確率は $1/6$ ではないという対立仮説が採択される。また，このとき**有意差**（「差」は仮説との差）があったという言い方をする。
- 帰無仮説を棄却出来なかった場合，帰無仮説が正しいと証明された訳ではない点に注意。
- つまり，23回6の目が出た場合，帰無仮説，「6の目が出る確率は $1/6$ である」は棄却できないが，確率 $1/6$ であることが証明された訳ではない（6の目が出る確率は $23/100$ の信頼区間と被っている）。

統計的仮説検定の手順・まとめ

証明したいこと
(対立仮説)は?
*6の出やすいさいころである。



帰無仮説の設定
*6が出やすいわけではない
=6の出る確率は1/6



データ収集

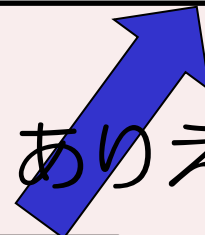


帰無仮説の検討

帰無仮説を棄却、対立仮説を採択。
*6の目が出る確率は1/6という帰無仮説を捨て、6が出やすいという対立仮説を採る。

帰無仮説を棄却できない。
*6の目が出る確率は1/6という可能性を否定できない。

統計的にありえない ありえる



統計的仮説検定の例

- 2012年11月15日現在の野田内閣の支持率は、時事通信によると17.3%であった。尚、回答者数は1272名である。野田内閣の支持率は20%でないと言えるだろうか $\alpha = 0.05$ で求めよ。

- <http://www.jiji.com/jc/zc?k=201211/2012111500600&g=pol>

- 帰無仮説は $P = \mu_x = 0.2$
- 帰無仮説が正しいとすると、標準誤差は、

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} = \sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{1272}} = 0.0112$$

統計的仮説検定の例

- これまでの値を以下の式に代入すると、中心極限定理と標準化の考え方より、その値は標準正規分布に従う。この値をz統計量と呼ぶ。

$$\begin{aligned} z &= \frac{\bar{x} - \mu_x}{\sigma_e} \\ &= \frac{0.173 - 0.2}{0.0112} = -2.407 \end{aligned}$$

- 標準正規分布の95%範囲は±1.96である。
-2.407は範囲外であるので、野田内閣の支持率が20%ある可能性は否定される。

t検定

統計的仮説検定の例

➤ 日本人30人を無作為に抽出してその知能指数を測定したところ、平均108、標準偏差11であった。日本人の知能指数の母平均は105ではないと言えるだろうか？ $\alpha = 0.05$ で求めよ。

➤ 帰無仮説は $\mu_x = 105$ 。これらを以下の式に代入すると **t 統計量** が得られる。

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_x}{s/\sqrt{n}} = \frac{108 - 105}{11/\sqrt{30}} = 1.49$$

➤ 自由度29の t 分布では、絶対値2.045の範囲に全体の95%が入る。よって、知能指数の母平均が105である可能性は否定できない。

統計的仮説検定の例

➤ 日本人60人を無作為に抽出してその知能指数を測定したところ、平均108、標準偏差11であった。日本人の知能指数の母平均は105ではないと言えるだろうか？ $\alpha = 0.05$ で求めよ。

➤ 帰無仮説は $\mu_x = 105$ 。これらを以下の式に代入するとt統計量が得られる。

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_x}{s/\sqrt{n}} = \frac{108 - 105}{11/\sqrt{60}} = 2.11$$

➤ 自由度59のt分布では、絶対値2.001の範囲に全体の95%が入る。よって帰無仮説の下ではまず起こらないと言え、母平均105という仮説は棄却される。

実習

- ▶ ドラマ“相棒”の2012年11月21日における関東地区の視聴率は16.4%。(ビデオリサーチ社調べ)であった。関東地方における真の視聴率が10%ではないことを示せ。標本数が600あるので、正規分布を利用して良い。
- ▶ 日本人男性をランダムに20人選んだところ、その平均身長は175cm、標準偏差は12であった。日本人男性の平均身長は168cmではないと言えるだろうか？
- ▶ それぞれ、 $\alpha = 0.05$ とする。

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_x}{\sigma_x / \sqrt{n}}, \quad t = \frac{\bar{x} - \mu_x}{s / \sqrt{n}}$$

追加資料

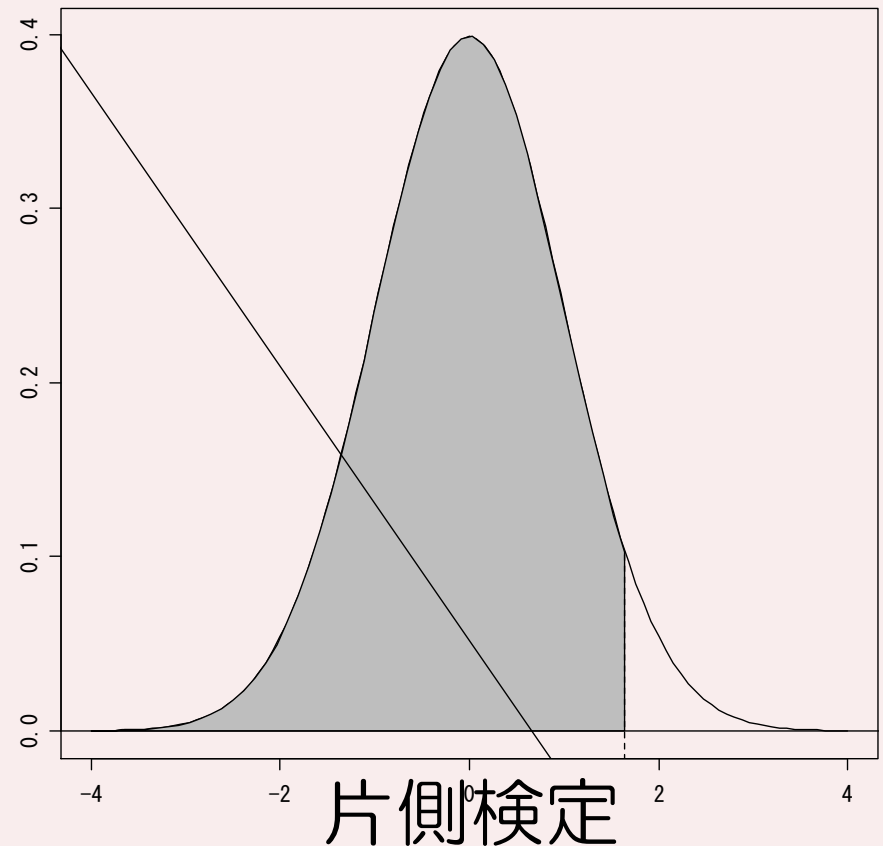
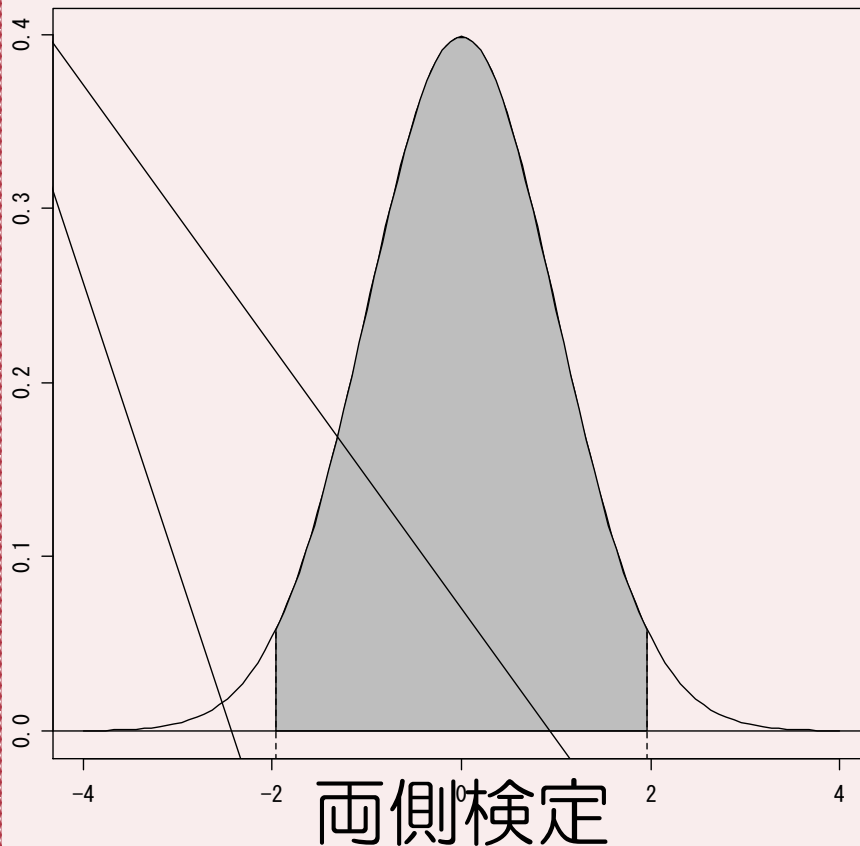
t 統計量と z 統計量

- 母標準偏差が既知であるとみなせる場合には、左の式により **z 統計量** が得られる。このとき、帰無仮説が真であれば z は標準正規分布に従う。
- 母標準偏差が未知である場合には、右の式により **t 統計量** が得られる。このとき、帰無仮説が真であれば、t は t 分布に従う。
- これらの値の絶対値が標準正規分布、当該自由度における t 分布の95%範囲より大きいならば、有意水準0.05で帰無仮説は棄却できる。

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_x}{\sigma_x / \sqrt{n}}, \quad t = \frac{\bar{x} - \mu_x}{s / \sqrt{n}}$$

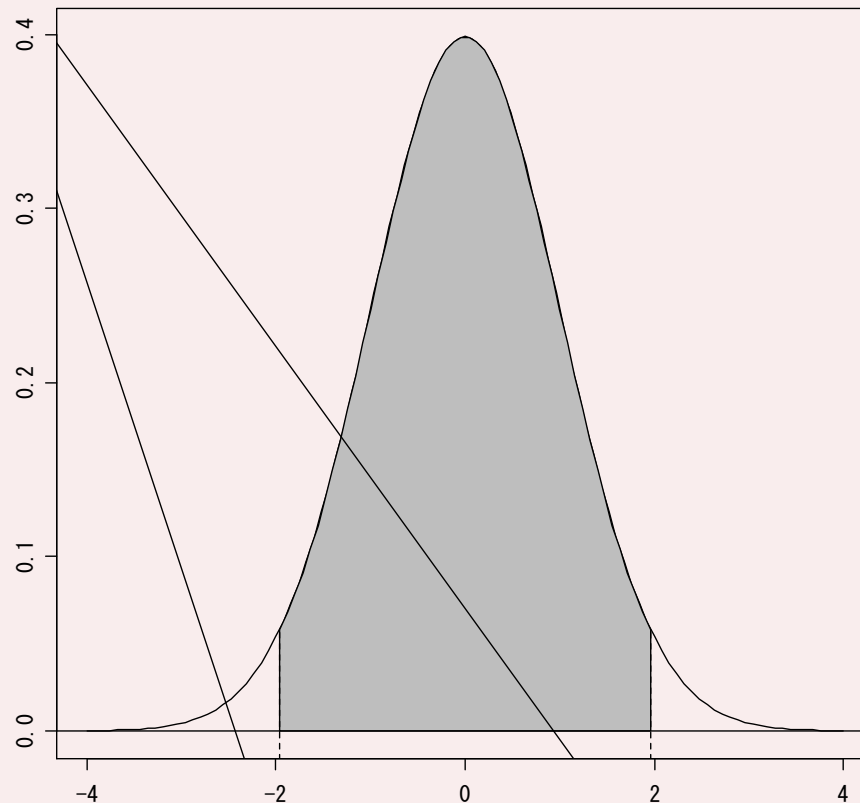
片側検定と両側検定

- 「起こりにくい」をどう定義するのかによって範囲の設定の仕方が変わる.
- どちらも塗りつぶした部分の面積は95%.



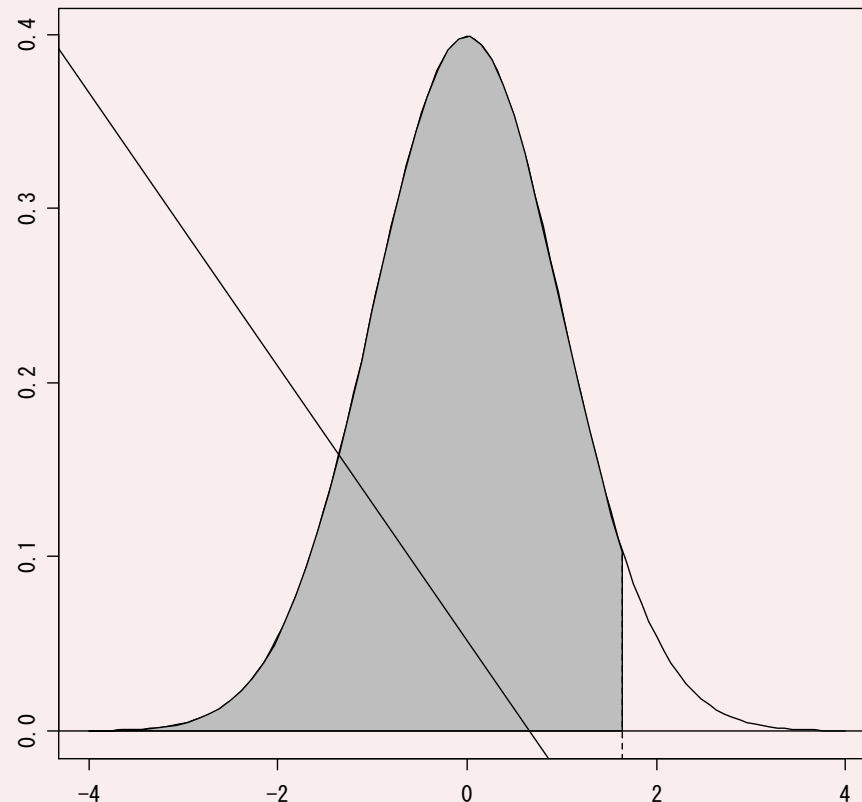
片側検定と両側検定

- 平均値が〇〇であるという帰無仮説を検定したいなら、両側検定を用いるのが一般的.



片側検定と両側検定

- 平均値がある値以上（以下）であることが明らかでない状態で検定したい場合には、片側検定を用いることができる。迷ったら両側検定を使うのが確実。



片側検定を行うことが出来る例

- 1年生と6年生ではどちらが体重が重いか？
- 勉強前と後では学力向上が見られるか？

- これらの例では、興味の対象は「向上しているか否か」であって、「高いか低いか」ではない。

統計的仮説検定の問題点

- あくまでも「確率」での評価であるため、間違える可能性がある。
- 帰無仮説が正しいとき棄却してしまう場合と、帰無仮説が間違いなのに棄却できない場合は間違いである。
- 帰無仮説が正しい時棄却しないのは正しい行動だが、結果としては何も言えない。帰無仮説が間違えている時に棄却するのが検定の目的。

帰無仮説	正しい	間違い
棄却しない	正しい	第二種の誤り β
棄却する	第一種の誤り α	検定成功